UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2007-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **08/03/2008**
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA
DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

P1 (07 Puntos)

Sea la integral: $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} x \, dx$

a) Realice el cambio de variable $x = 1/t$ y con h=0.1 resuelva mediante la siguiente fórmula de Newton-Cotes abierta:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{24}\left(11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)\right)$$

b) La integral anterior se puede aproximar a $\int_1^{b} e^{-\sqrt{x}} x \, dx$, eligiendo un valor de ***b*** tal que el área a la derecha de b sea despreciable. Aplique el método del trapecio considerando ***b=101*** y ***h=5***.

c) Comente sus resultados sabiendo que la integral exacta es $\mathbf{32e^{-1}}$.

Solución

a)

Haciendo el cambio de variable $x = 1/t$:

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{1/t}} \frac{1}{t^3} dt = \int_0^1 f(t)\, dt$$

$$I = \frac{5x0.1}{24}\left(11f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + 11f(0.4) + 11f(0.6) + f(0.7) + f(0.8) + 11f(0.9)\right)$$

$$I = 11.2728$$

b)

$$\int_1^{101} e^{-\sqrt{x}} x \, dx = \int_1^{101} g(x)\, dx$$

$$I = \frac{5}{2}\left(g(1) + 2\left(g(6) + g(11) + \cdots + g(96)\right) + g(101)\right)$$

I = 11.3574

c)

Ie = 11.7721

Se observa que la aproximación del trapecio es ligeramente mejor.

P2 (06 Puntos)

Dada la siguiente información:

x	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
y	0,7039	0,6247	0,5410	0,4546	0,3675

Se desea evaluar la integral I= $\int_{1.4}^{2.2} f(x)dx$, usando el método de Romberg. Cuantos niveles de Romberg (columnas) serán necesarias para alcanzar la misma precisión de Simpson 1/3. Justifique.

Solución

Aplicando Simpson 1/3:

I= $\int_{1.4}^{2.2} f(x)dx = h/3*(f(1.4)+4f(1.6)+2f(1.8)+4f(2.0)+f(2.2))$ =<u>0.43137333333333</u>

Aplicando la cuadratura de Romberg:

Rj,0	Rj,1	Rj,2
0.4286		
0.4307	0.43138666666667	
0.4312	<u>0.43137333333333</u>	0.43137244444444

P3 (07 Puntos)

Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = y + x$, con las condiciones iniciales x0=0 y y0=1.

a) (5 ptos) Encuentre una expresión polinómica para hallar h, de tal manera que en un paso, se cumpla: y1ep=n y1rk
   donde:
   - n: constante real.
   - y1ep: y1 usando euler progresivo
   - y1rk: y1 usando Runge - Kutta cuarto orden

b) (2 ptos) Encuentre el valor de h con 2 decimales exactos para n=2, si el valor de h esta dentro del intervalo [1,1 y 1,3]

Solución

a)

Aplicando método Euler

Reemplazando para x_o=0 y y_o=1:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i$$
$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + x_i)$$
$$y_1 = y_0 + h(y_0 + x_0)$$
$$y_1 = 1 + h$$

Aplicando el método de Runge Kutta
Reemplazando para x_o=0 y y_o=1:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$
$$k_1 = f(x_i, y_i) = x_i + y_i = 1$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) = x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i) = 1 + h$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) = x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i)) =$$
$$= 1 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}(1 + h) = 1 + h + \frac{h^2}{2}$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) = x_i + h + y_i + h(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i)))$$
$$= h + 1 + h(1 + h + \frac{h^2}{2}) = 1 + 2h + h^2 + \frac{h^3}{2}$$

$$y_1 = 1 + \frac{h}{6}(1 + 2(1 + h) + 2(1 + h + \frac{h^2}{2}) + 1 + 2h + h^2 + \frac{h^3}{2})$$
$$y_1 = 1 + \frac{h}{6}(6 + 6h + 2h^2 + \frac{h^3}{2})$$

Por condición del problema:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{12}(h^4 + 4h^3 + 12h^2 + 12h) = n(1 + h)$$
$$h^4 + 4h^3 + 12h^2 + 12h(1 - n) + 12(1 - n) = 0$$

b) Para n=2:

$$h^4 + 4h^3 + 12h^2 - 12h - 12 = 0$$

Aplicando método de bisección en [1.1, 1.3]
Tenemos
h=1.2033

Los Profesores